Le point d'inflexion

Bulletin du secteur mathématiques de l'ICEM-Pédagogie Freinet

avril 2024

Problématiser, apprendre à penser

Une condition pour un enseignement démocratique des mathématiques

Dès 1947, Freinet nous parlait déjà du problème en ces termes : « *Comme il est regrettable que la scolastique nous ait dégoutés du problème ! Car le problème est essentiel à la vie. L'aptitude au problème est peut-être bien une de ces qualités spécifiques à l'homme, qui font tout à la fois son tourment et sa grandeur. L'homme qui ne se pose plus de problèmes a déjà un pied dans la tombe. […] Le problème traditionnel reste une colle, une épreuve de classement, de concours ou d'examen. On n'aide point l'enfant à trouver la réponse qu'il cherche et dont il sent le besoin ; on accumule au contraire les difficultés pour qu'il ne puisse pas trouver cette réponse. […] Nous pensons qu'il y a possibilité de trouver une autre forme de problème qui laisse à l'enfant l'effort de la recherche et la saveur de la réussite, et qui soit conçue sous une forme plus humaine, plus à la mesure du processus de développement de l'enfant.* »

Depuis, de nombreux penseurs en éducation ont défini le problème comme étant une des conditions d'un enseignement démocratique. En effet, l'apprentissage de la démocratie se réalise au cœur de l'acte d'apprendre, par la construction et la résolution de problèmes. Problématiser, c'est apprendre à penser et pour fonder une démocratie, il faut que le plus grand nombre pense le plus possible pour construire une société désirable. L'intérêt d'un enseignement par construction de problèmes est de former un citoyen qui sait se mettre en accord avec ses pairs et sait que la résolution des problèmes ne repose pas intégralement sur un être supérieur infaillible, ni sur la volonté divine, mais fait aussi appel à sa responsabilité d'être pensant. L'accès à la pensée problématique, comme aspect éminent de la culture, constitue un enjeu non seulement intellectuel, mais aussi politique, pour une pédagogie populaire offrant à tous la possibilité d'une telle compétence, compétence critique et d'émancipation.

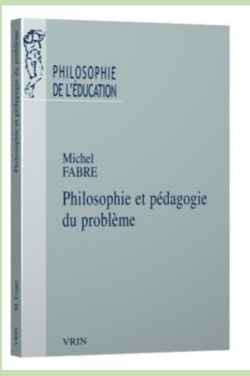
Il y a *problème* lorsqu'un déséquilibre se fait jour dans la situation et que l'organisme ne peut y remédier immédiatement. La connaissance n'est alors possible que parce que l'esprit se porte toujours au-delà, ailleurs, en avant. Il y a un dynamisme de l'esprit qui ne se contente pas d'enregistrer des données ou des informations mais les dépasse toujours. Il s'agit ici pour l'enseignant d'éduquer le désir des enfants, leur « puissance de vie », pour que celle-ci se porte vers la connaissance. Il est essentiel que les enfants dépassent la simple observation de données ou de faits pour se porter toujours en avant, vers la problématisation. Si les données qui sont devant nous sont inscrites dans notre effort de problématisation, elles prennent sens. Un problème n'est jamais donné, il se construit. Le véritable obstacle à la connaissance, c'est l'absence d'obstacle ! (de problème !), c'est quand les solutions nous sont données de manière dogmatique par la leçon et par l'explication.

Depuis la naissance du mouvement Freinet, de nombreux militants ont tenté de placer la problématisation au cœur des apprentissages. La Méthode naturelle de mathématique s'est alors reconstruite. Nous nous sommes intéressés à l'essence même des mathématiques et à la pratique du mathématicien. En effet, nous pensons que si l'enseignement des mathématiques ne respecte pas ce qui caractérise cette discipline, il ne respecte pas non plus la formation de l'homme à laquelle il pourrait, par nature, très largement contribuer. Or, que nous disent la majorité des mathématiciens ? Le mathématicien construit un *problème* qui l'oblige à *créer ses propres objets de recherche* et *les relations* entre ces objets. Son travail engage autant la *rigueur* et la *rationalité* que l'*imagination* et la *création*. La pensée mathématique est créative. On peut dire alors que la Méthode naturelle organise une rencontre entre l'imagination créatrice des enfants et la spécificité des mathématiques. Elle produit du sens conforme à leur essence.

Cependant, il y a une spécificité de la problématisation en pédagogie Freinet : elle s'élabore sur fond d'intentionnalités, de subjectivité, de désirs, de sensibilité, d'imaginaire, d'affectivité, autant que de rationalité, d'objectivité, de nécessité, d'abstraction intellectuelle. Cette activité intellectuelle s'inscrit dans une pratique sociale coopérative qui la détermine et qu'elle détermine en retour.

Notre travail est donc d'élucider la question suivante : Comment entreprendre l'activité spécifique de problématisation dans le milieu complexe de la classe Freinet ? Pour nous, enseignants , elle engage une certaine pratique d'écoute et d'interprétation que nous tentons d'élucider et c'est bien là le travail principal de notre secteur.

Danielle Thorel (D'après des textes du labo de l'ICEM et l'ouvrage de Michel Fabre *Philosophie et pédagogie du problème*)



Les mardis du secteur math

Un mardi par mois, de 20h à 21h, le secteur mathématique de l'ICEM convie la fédération ICEM à une soirée de coformation en Visio réunion.
Ce moment comprend :

- **Une partie spécifique :**
  Quelqu'un prend en charge la présentation d'une pratique dans sa classe, une recherche math et on l'interroge sur cette recherche. Le secteur peut travailler avec le ou la volontaire pour l'aider à réaliser cette présentation.

- **Un élargissement :**

  On donne la parole aux participants pour des questions ou des remarques.
  Ensuite, on voit si possible des situations parallèles dans des classes de différents niveaux.

- **Une partie théorique. :**
  Dans un troisième temps, on en discute sur le plan théorique mathématique.

Nous avons déjà organisé cinq visios :

- En novembre, Charline Ouattara a présenté une recherche collective dans sa classe de GS maternelle sur la décomposition des nombres ,fonction x+y=constante.

- En décembre, Jean Lesage a présenté une recherche sur une construction géométrique dans sa classe de cycle 3.

- En janvier, Eric Gressier a présenté une recherche sur une fonction numérique dans sa classe de CM1 CM2.

- En février, Tristan Lechaux a présenté une recherche sur la symétrie axiale dans sa classe de CM1 CM2.

- En mars, Sonia Sorgato, membre du mouvement Freinet italien, a présenté une recherche dans sa classe de CM sur le périmètre et l'aire du carré.

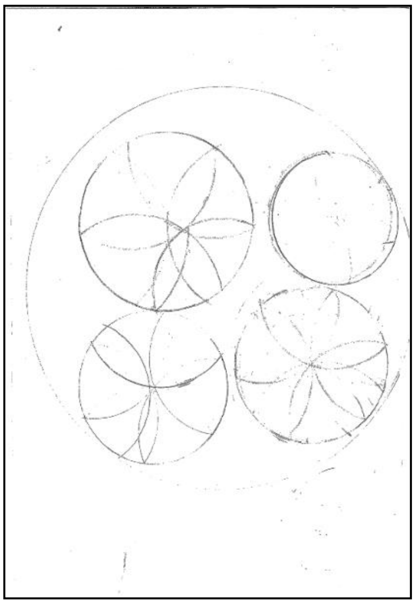
Deuxième séance

mardi 19 décembre 2023 - 15 participants

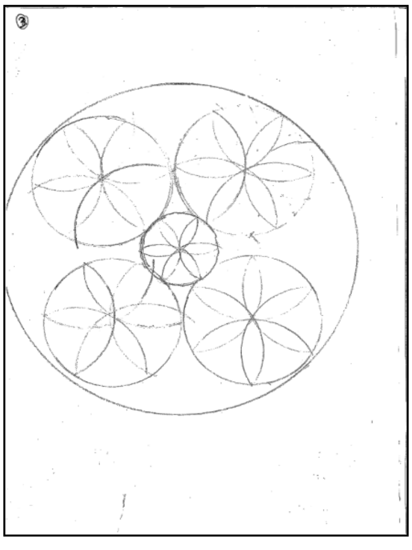
De la recherche individuelle à la recherche collective

Classe de Jean Lesage - cycle 3 - Vieux-Mesnil (Nord)

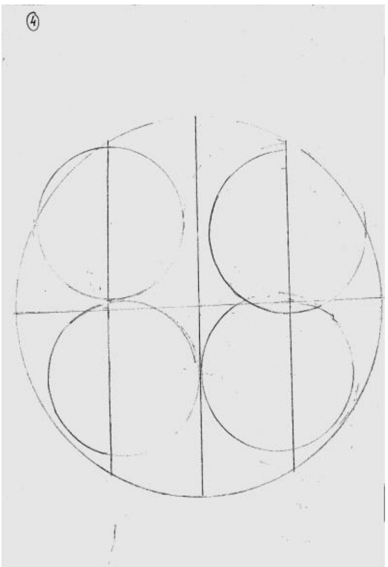
Compte rendu de la recherche par Jean



Emilie met dans le bac à corriger cette création mathématique. Je la découvre le soir. Je perçois une recherche qui consiste à tracer 4 cercles tangents eux-mêmes inscrits dans un grand cercle. Je lui propose le lendemain de mener seule cette recherche.

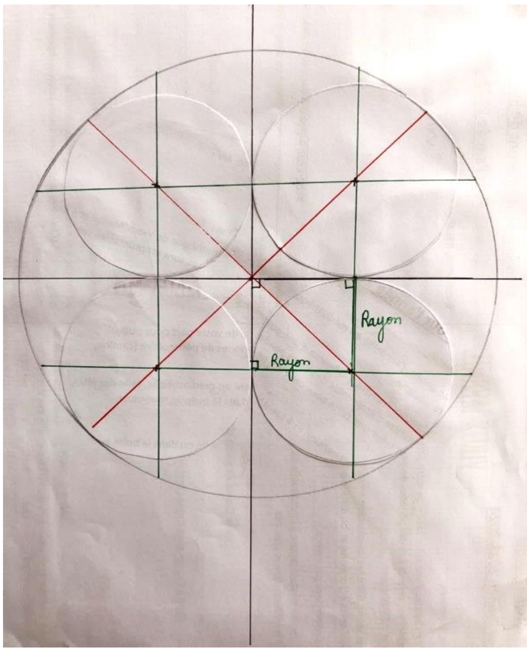


Après plusieurs tentatives de respecter les tangences, elle me montre celle-ci. Les tangences sont presque respectées. Sa technique? Elle ne sait pas la décrire. Elle ajoute un cinquième cercle. Ce n'est pas le « contrat ». Je lui soumets l'idée de partager un grand cercle en 4 parties égales (ce qu'elle sait faire) avant de tracer les petits. Elle continue à tracer des rosaces. Je lui dis que sa construction va être trop difficile à réaliser, qu'il faudrait la simplifier et qu'elle pourra revenir sur les rosaces après sur une autre recherche. Elle semble d'accord mais j'ai le sentiment de trop intervenir !



Elle s'approche du but. Elle a eu l'idée de tracer deux droites parallèles qui passent par les milieux des deux rayons horizontaux du grand cercle et sur lesquelles elle a pointé le centre des deux cercles du haut.

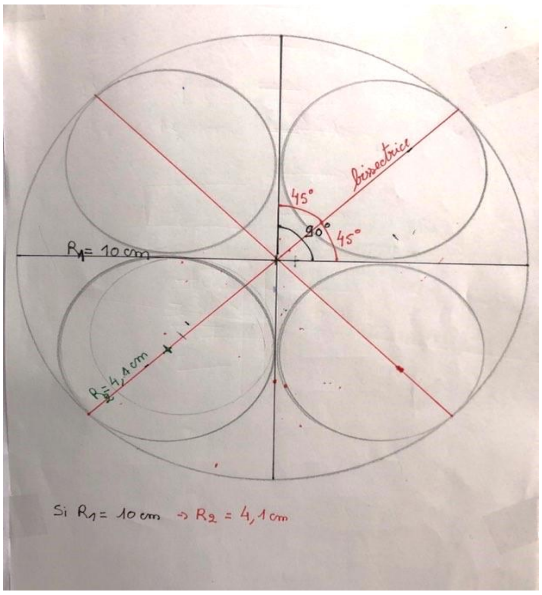
Après un 5éme essai beaucoup moins concluant que le précédent, je lui propose de nous en remettre au groupe. Pratique fréquente en cas de difficulté. La demi-heure de travail collectif en mathématiques qui suit le travail individuel sera consacrée à sa recherche. Il en faudra deux autres pour la conclure .



Après avoir expliqué le défi d'Emilie, je propose de placer par collage des petits cercles découpés comme l'impose le défi. On a ensuite tracé les deux droites tangentes aux petits cercles. Nous percevons que leur point d'intersection semble être le centre du grand cercle ! Nous le traçons. Ça marche ! Les deux droites sont deux diamètres perpendiculaires. Ce sont les élèves qui le font remarquer. Plusieurs recherches précédentes nous ont permis de savoir partager un cercle en 4 parts égales avec la technique des deux diamètres perpendiculaires. Nous relions les centres des petits cercles. Nous reconnaissons le carré. Nous vérifions. Nous traçons ses diagonales. On a l'impression que le grand cercle est divisé en 8 parts égales. Nous vérifions, les angles font tous 45 degrés. Je fais remarquer qu'elles coupent les angles droits en deux parts égales. J'introduis la notion de bissectrice et sa construction.

Extrait de la discussion avec les participants :

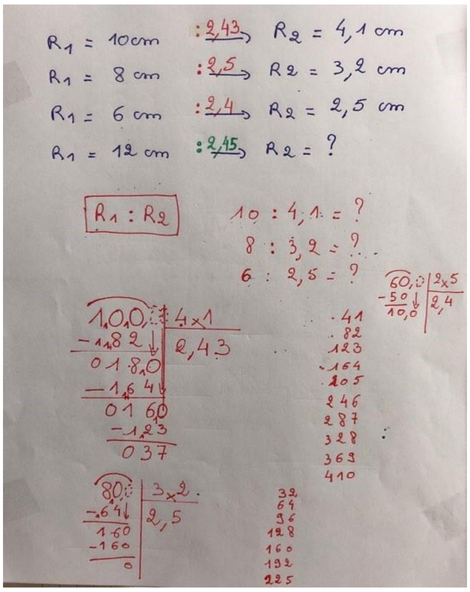
Comment motiver la classe entière pour une recherche collective ? Jean nous répond que c'est une habitude de la classe d'aider aux recherches individuelles en collectif et que chacun y participe volontiers, c'est une ambiance de classe coopérative qu'il faut instaurer.



Nous savons donc maintenant que le centre des petits cercles se trouvent sur les bissectrices. Nous pouvons reprendre la recherche «à l'endroit» en commençant par tracer le grand cercle, deux diamètres perpendiculaires et leur bissectrice. Par tâtonnement nous recherchons l'écart du compas qui permettra de tracer les cercles tangents. Nous construisons la figure pour R1 =10, R1=8 et R1 = 6 puis nous « récoltons » les mesures de R2 pour chaque longueur de R1.

Extrait de la discussion avec les participants :

Si on regarde le déroulé de la recherche, on peut dire qu'il y a eu plusieurs essais individuels par tâtonnements au hasard, puis collectivement, une méthode apparaît :
-refaire la figure exacte en se servant d'outils (ici les cercles découpés)
-explorer cette figure pour en découvrir les propriétés (quelles sont les « nécessités » pour que cette figure soit exacte : les centres des petits cercles sont sur les bissectrices des angles droits au centre, la rapport entre le rayon du grand cercle et du petit cercle est égal à 2,45 environ)
-se servir de ces découvertes pour construire la figure de façon exacte . Les découvertes auraient pu être autres (par exemple les 8 axes de symétrie de la figure).

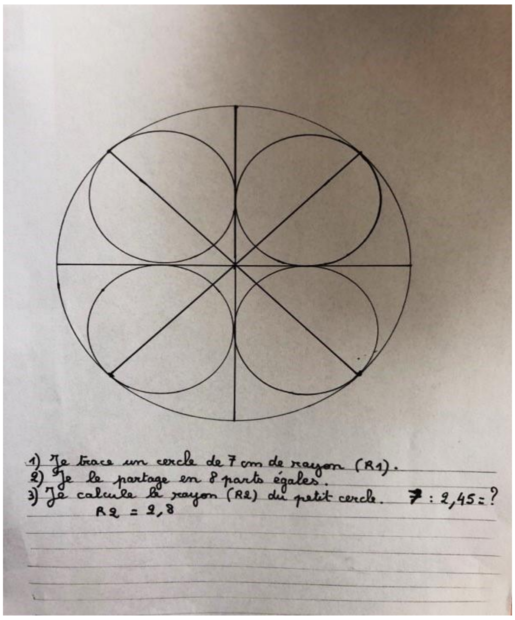


Je propose de rechercher R2 si R1 = 12 , cette fois sans tracer les cercles avant, par calcul donc.

Mathis (CM2) propose de calculer les rapports entre R1 et R2 des trois figures précédentes. Nous constatons qu'ils sont presque identiques. Nous nous accordons pour prendre le nombre « du milieu » entre 2,4 et 2,5.

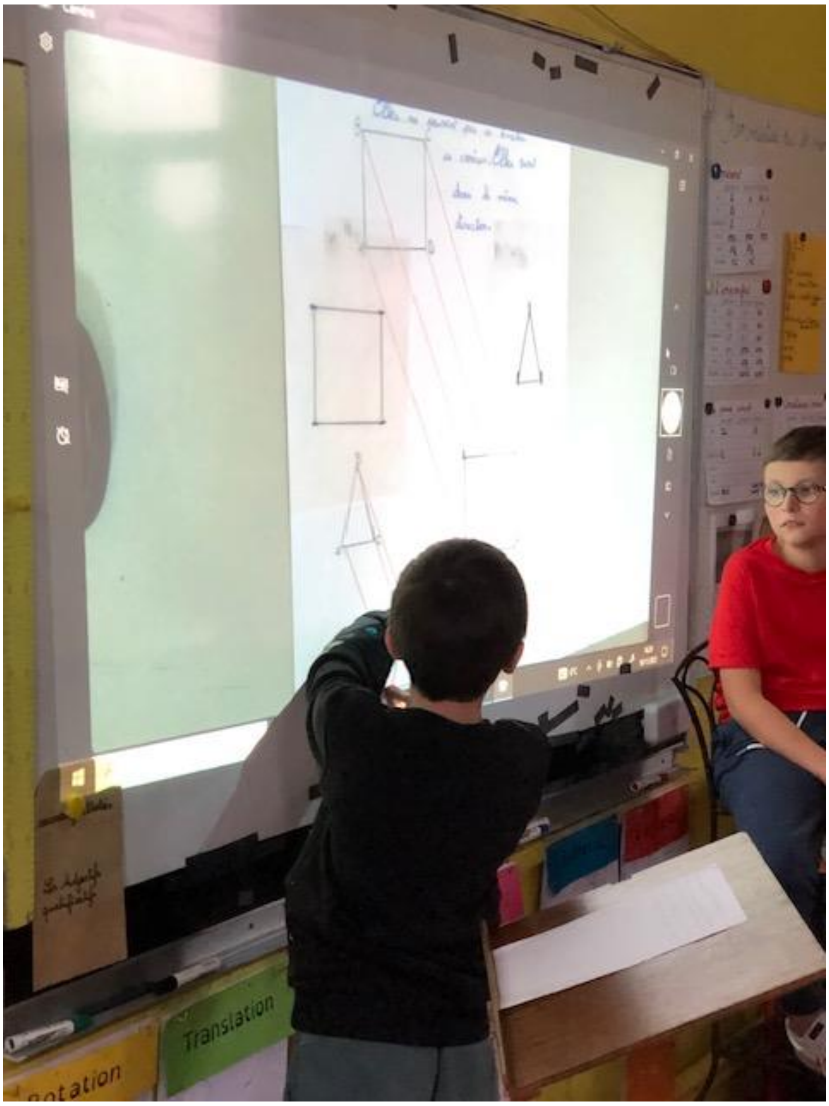
Ce travail permet de réactiver la technique opératoire de la division déjà apprise avec les CM.

Extrait de la discussion avec les participants : Est-il bien utile que les enfants refassent toutes ces divisions ? La calculette aurait pu être utilisée étant donné que la technique de la division n'est pas l'objet de la recherche.



Nous essayons une dernière fois avec R1=7 et donc R2=2,8.

Mise au propre, ça marche !

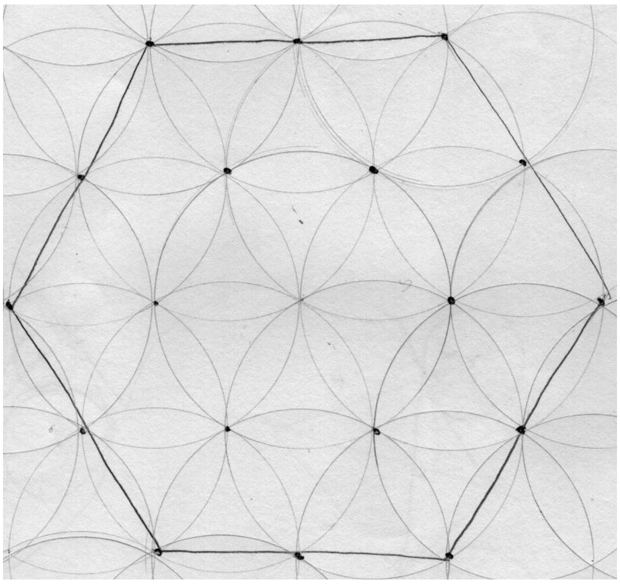


Présentation d'une recherche mathématique dans la classe de Jean Lesage

Apport théorique

Par Rémi Brault

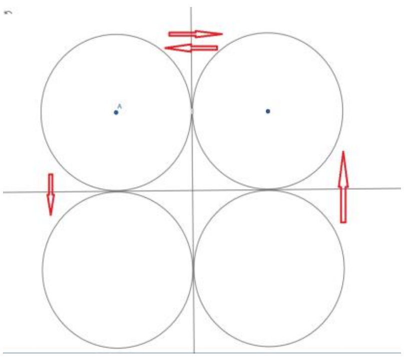
1) Si la recherche était partie sur les rosaces (cercles plutôt sécants), Emilie se serait aperçue qu'il est plus facile de les ranger dans des polygones (hexagones comme pour les réserves de miel des abeilles).



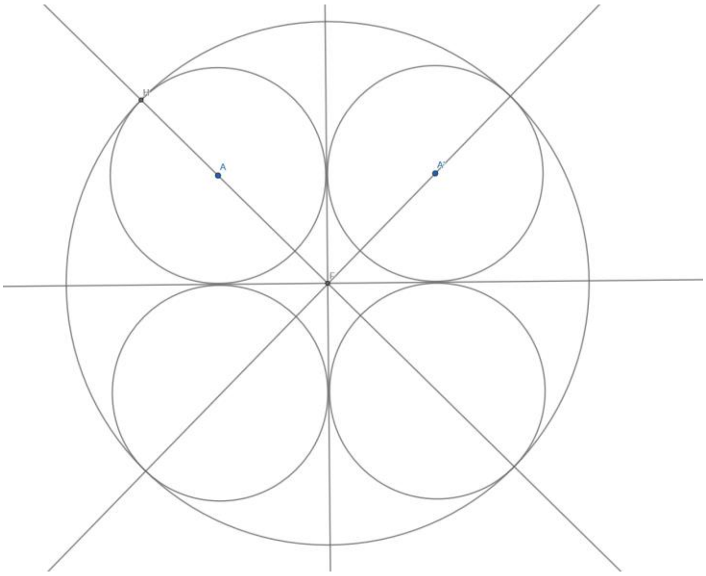
2) Toujours à partir de ses premiers jets, plusieurs possibilités :
   1. 2 cercles tangents à l'intérieur d'un autre,
   2. 3 cercles
   3. 4 cercles avec 3 ou 4 points de tangence. Combien de points de tangence possible entre les petits cercles à l'intérieur du grand cercle ?
   4. 5 cercles comme Emilie en page 6.

   Les cercles ayant même rayon, ou pas.

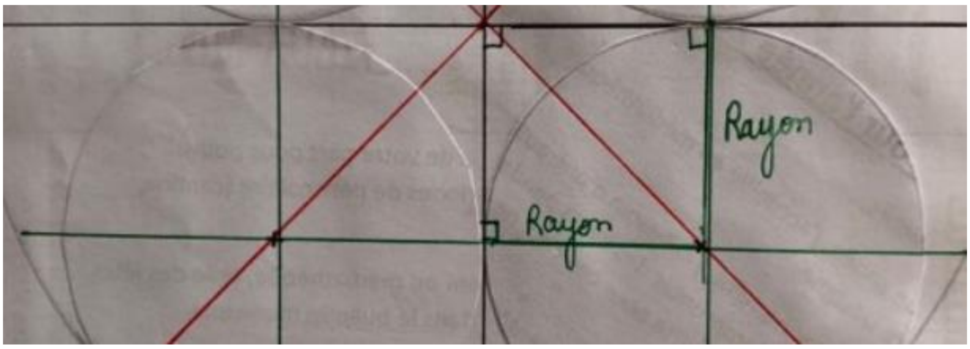
3) Ici, comme souvent quand le problème est trop complexe, on fait le choix de simplifier il y aura 4 cercles tangents et de même taille. Et le maître propose de les inscrire dans un quart de disque. On pouvait aussi aller vers ce choix contraint par tâtonnements en déplaçant des disques les uns contre les autres et en constatant des symétries.



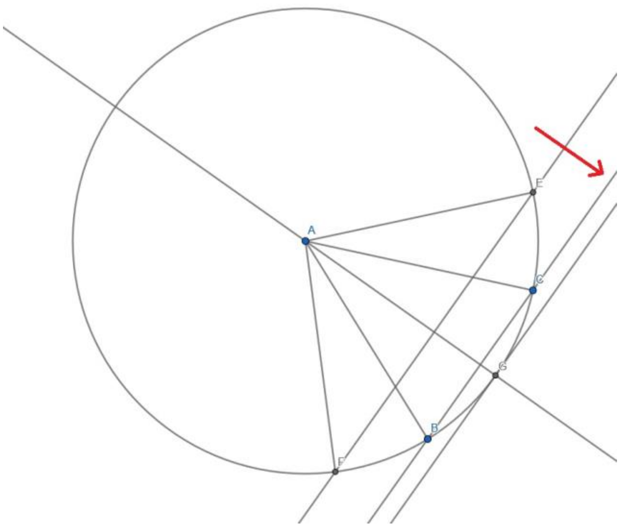
4) Si on s’attarde un peu, on s'aperçoit qu'il n'y a pas 2 axes de symétrie, mais 4. Donc, sans parler de bissectrice, on voit les lignes où se trouvent les centres des petits cercles.



Et des perpendiculaires découlent de la symétrie.

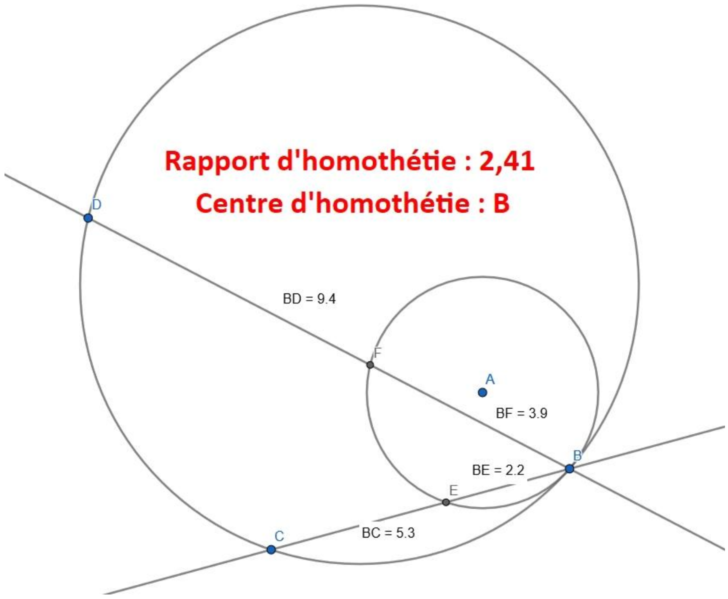


5) Du côté de la tangence, ce peut être intéressant de penser à la limite d'une suite de sécantes de même direction (les élèves aiment bien ces histoires de limites). C'est plus facile à voir avec une droite, mais ce peut être un cercle. On établit facilement que le rayon est perpendiculaire à la tangente. Là encore, on peut penser à la symétrie (triangle isocèle).

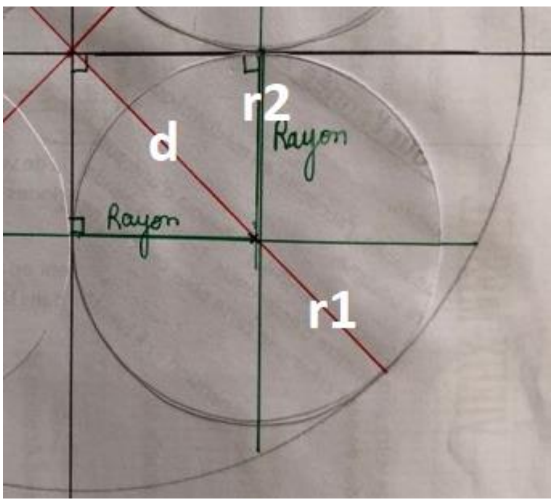


6) En arrière-plan, il est beaucoup question de distance :
le cercle → points à la même distance d'un centre,
la plus petite distance d'un point à une droite (→ perpendiculaire),
chercher un point à la même distance de deux droites et d'un cercle.

7) En regardant de plus près, il est aussi question de rapport d'homothétie.
C'est un peu plus facile de le concevoir des petits cercles vers le grand cercle (x 2,41) → où se trouve le centre d'homothétie ? On peut vérifier aussi si ça marche de ce côté.



8) Evidemment, on peut calculer le rayon r2 en fonction de r1 en écrivant la distance entre les centres de 2 façons.



$d^2 = 2\ r_2^2$ => $d = \sqrt{2}\ r_2$ (d : diagonale du carré)

$d = r_1 - r_2 = \sqrt{2}\ r2$ (r_1 : rayon du grand cercle)

d'où $r_2 (\sqrt{2} + 1) = r1$ et $r_2 = r_1 / 2{,}414$..........

Ce que les enfants avaient trouvé à peu de chose près !

Deux exemples de problématisation

Un problème mathématique surgit pendant une réunion de GD

Je vais essayer de raconter ce qui s'est passé dans la classe de Sabine Vermersch (classe de GS/CP /CE1) un mercredi, pendant la réunion de notre groupe régional Nord-Pas de calais. Les CE1 ont fait une recherche à partir d'une histoire vécue racontée à l'entretien du matin. Pour la perte d'une dent de lait, la petite souris a apporté 3 euros à un enfant de la classe. Les élèves se sont demandé comment on pouvait faire 3 euros avec des pièces de 2 et 1 euros. Ils ont trouvé 3 solutions, l'ordre dans lequel on écrit les nombres revêt une importance pour eux:
2+1
1+2
1+1+1
Puis pour 2 dents, 6 euros. Mais ils en sont venus à chercher le nombre de façons de faire 6 euros avec des pièces de 2 euros et 1 euro. Et ils ont trouvé 13 solutions pendant la séquence à laquelle nous avons assisté.

Les solutions sont les suivantes:

2+2+2	2+1+1+1+1	1+2+2+1
1+2+1+2	1+2+1+1+1	2+1+2+1
2+2+1+1	1+1+2+1+1	1+1+2+2
2+1+1+2	1+1+1+2+1	
1+1+1+1+1+1	1+1+1+1+2	

Donc 13 solutions. Puis ils ont cherché une façon de classer toutes ces solutions pour ne rien oublier : chercher les solutions avec une pièce de 2 euros, puis celles avec 2 pièces de 2 euros et celles avec 3 pièces de 2 euros.
L'après-midi, quand les élèves étaient partis, Rémi Jacquet nous a donné une idée de recherche : comment ça marche pour 4 euros, 5 euros, 7 euros...? Parce que ça nous semblait bizarre ce nombre de solutions : 13 !
Nous connaissions déjà quelques éléments de la combinatoire: permutations, arrangements, combinaisons...et quelques formules qui s'y rattachent comme "factoriel n" (n!) par exemple pour les permutations. Et nous ne nous y retrouvions pas avec ces connaissances! Aucune formule connue ne convenait! En effet, factoriel 6, ça fait 6X5X4X3X2X1 = 720 et non pas 13! Ces données venaient heurter nos connaissances acquises.

Nous étions devant un vrai problème !
Nous avions aussi repéré une fonction: pour 3 euros, 3 solutions ; pour 6 euros, 13 solutions ; ...Mais, quelle est cette fonction? Elle ne correspondait pas à toutes celles que nous connaissons déjà. $y = ax$? $y = ax + b$? $x + y = a$ ...Toutes les copines et copains présents étaient en train de griffonner pour trouver le nombre de solutions et savoir s'il n'y avait pas d'erreurs. Nous cherchions des régularités dans les résultats.

Et devinez ce qu'on a trouvé?
Pour 1 euro, 1 solution,
pour 2, 2 solutions,
pour 3, 3
pour 4, 5
pour 5, 8
pour 6, 13
pour 7, 21
....
On n'est pas allé plus loin mais 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21...Pour certains, ça a fait tout de suite penser à la suite de Fibonacci! (Un nombre est la somme des deux précédents) Il faudrait continuer encore pour voir si ça marche!
Mais pourquoi la suite de Fibonacci ? On n'arrête pas de se questionner.

Pour les curieux, j'ai trouvé cette formule pour la fonction en jeu dans notre recherche :

$$f(n) = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{x} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{x}}{\sqrt{5}}$$

dans l'ensemble des nombres entiers.

Un autre exemple de problème dans une classe de CE2

Voici une création d'Ophélie, élève de CE2 :

1 + 2 = 3
3 + 4 = 7
5 + 6 = 11
7 + 8 = 15
9 + 10 = 19

Nous essayons de comprendre ce qu'elle a voulu faire, nous continuons ensemble la suite des additions. Nous recherchons des invariants dans la suite des résultats. Etonnement ! Les résultats « vont de 4 en 4 » même si on continue la suite selon la « règle » d'Ophélie qui est de faire la somme de deux nombres consécutifs en conservant la suite des nombres naturels (1 + 2, 3 + 4, 5 + 6…). On aurait cru qu'ils iraient de « 2 en 2 » !

Et si on essayait avec 3 nombres, 4 nombres ?

-Avec 3 nombres ce sera certainement de 5 en 5 puisque pour 2 nombres c'est 4, pour 3 nombres c'est 5 !
-Non ça va être 6 parce que 2X2=4 donc 3X2=6…

1 + 2 + 3 = 6
4 + 5 + 6 = 15

7 + 8 + 9 = 24
10 + 11 + 12 = 33

Pour 3 nombres, les résultats « vont de 9 en 9 » ! Surprise !
Pour des sommes de 4 nombres, on s'apercevra que les nombres « vont de 16 en 16 ».
Regardons les couples de cette fonction déjà trouvés :

2→4
3→9
4→16

Avec l'aide de la maitresse, le groupe trouvera que :

2→ 2 × 2
3→ 3 × 3
4→ 4 × 4

(fonction $y = x^2$)

Pour des additions de 6 nombres ? de 10 nombres ? de 27 nombres ?

Classe de Jean Lesage